آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : **ریاضی**	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : **تجربی**	**پایه ی یازدهم دوره ی متوسطه**	تعداد صفحات : **۱۰ صفحه**
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	**جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید**		

ردیف	سوالات	نمره

۱ نقاطی را بر روی خط $y = x - ۳$ بیابید که فاصلهٔ آن‌ها از خط $y - ۴x = ۳$ برابر با $\sqrt{۱۷}$ باشد.

۲ اندازهٔ محیطهای دو مثلث متشابه ۱۵ و ۸ می‌باشد. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۲۵ واحد مربع باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر چقدر است؟

۳ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $-x^۲ + ۴x - ۳ = ۰$ باشند، بدون حل معادله حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف

$$\frac{۲\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

ب

$$\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta}$$

۴ یک پیتزا به قطر ۲۵ سانتی‌متر را به ۸ قسمت مساوی برش می‌دهیم. اندازهٔ کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی در هر قطاع چند سانتی‌متر است؟ (پیتزا دایره‌ای فرض شود)

۵ نمودار $y = [\frac{1}{x}]$ در بازهٔ $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$ را رسم کنید.

۶ تابع $f(x) = |x+2| - |x-1|$ در بازه‌ای یک‌به‌یک است. ضابطهٔ وارون آن را در این بازه به همراه دامنه و برد آن به دست آورید.

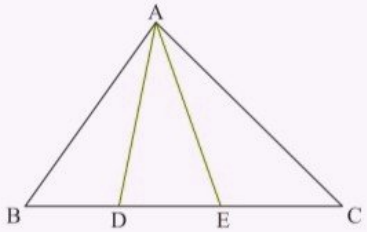
۷ اگر $f(x) = -|x-1|$ و $g(x) = [2x-3]$، آنگاه حاصل $(\frac{g}{f})(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۸ معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن، مکعب ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 6x + 3 = 0$ باشند.

۹ توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$ مفروضند.

الف مقدار $(\frac{2f-g}{f})(1)$ را محاسبه کنید.

۱۰ در شکل زیر مساحت مثلث ACE چهار برابر مساحت مثلث ADE و سه برابر مساحت مثلث ABD است، نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به دست آورید.



۱۱ دو ضلع مربعی روی دو خط به معادله‌های $۲x + y = ۱$ و $۴x + ۲y = ۱۱$ قرار دارند.

الف شیب خطوطی را که دو ضلع دیگر مربع روی آن‌ها قرار دارند، بیابید.

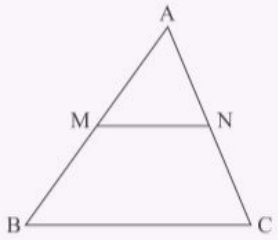
ب مساحت این مربع را محاسبه کنید.

۱۲ مجموعه جواب $[x - ۵] = ۱۲$ را بیابید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۳ نقاط $A(۲,k)$ و $B(-۱,-۱)$ و $C(۴,۱)$ رئوس یک مثلث هستند. اگر طول میانهٔ BM برابر با ۵ باشد، k چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۱۴ در شکل زیر $BC||MN$ و مساحت ذوزنقه $MNCB$ پانزده برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به دست آورید.



۱۵ ریشه‌های معادلهٔ زیر را به دست آورید.

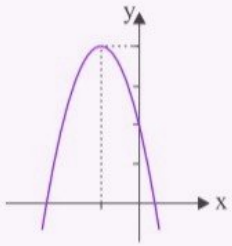
$$\sqrt{x^{۲} - ۲x - ۳} + \sqrt{x^{۴} - ۳x^{۳} - x^{۲} + ۹} = ۰$$

۱۶ نشان دهید عکس قضیهٔ فیثاغورس نیز درست است.

۱۷ معادلهٔ خط $۲x + y = ۸$ بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۵}$ مماس است. مرکز این دایره بر روی خطی به معادلهٔ $y = ۲x - ۱$ قرار دارد. مرکز دایره را بیابید.

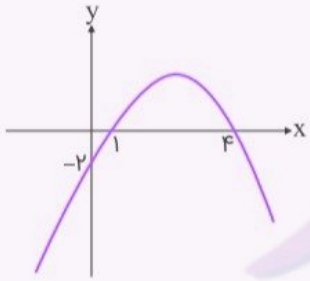
۱۸ ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{x - ۱}{x}$ یک‌به‌یک است.

۱۹ نمودار سهمی $y = f(x)$ به‌صورت زیر است. جواب‌های معادلهٔ $f(x)^{۲} + ۱۲f(x) = ۲۸$ را به دست آورید. (هر فاصله را یک واحد روی محور در نظر بگیرید)



۲۰ اگر $\frac{a}{۲} = \frac{b}{۳} = \frac{c}{۴}$، مقدار عددی $\frac{۲a + ۳b + ۴c}{۵a - ۴b + ۳c}$ را بیابید.

۲۱ سهمی زیر را در نظر بگیرید.



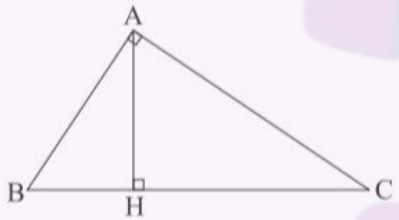
الف ضابطهٔ نمودار سهمی را به دست آورید.

ب ماکزیمم تابع سهمی چقدر است؟

۲۲ به ازای چه مقادیری از m، معادلهٔ $(1-m)x-\sqrt{x}+(m-2)=0$ یک ریشه دارد؟

۲۳ اگر در معادلهٔ درجهٔ دوم $-x^2+(m+1)x+2m=0$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر ۲- باشد، مجموع ریشه‌ها را بیابید.

۲۴ در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم.

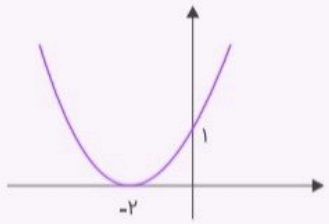


الف چند جفت مثلث متشابه در شکل وجود دارد؟ آن‌ها را فقط نام ببرید.

ب ثابت کنید:

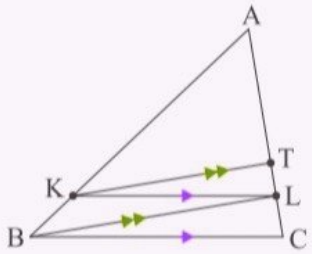
$$AB^2 = BH \cdot BC$$

۲۵ معادلهٔ سهمی زیر را بنویسید.

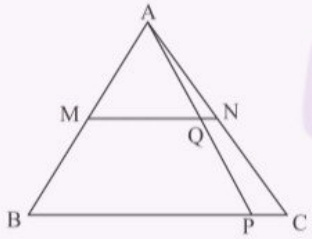


۲۶ برد تابع $f(x) = ۲\sin^۲ x + ۵\cos^۲ x + ۱$ را به دست آورید.

۲۷ در شکل زیر داریم: $KL \parallel BC$ و $KT \parallel BL$. اگر داشته باشیم $AT = ۸$ و $LC = ۲/۵$، اندازهٔ TL را بیابید.



۲۸ در مثلث ABC خط MN موازی BC است و $\frac{AM}{MB} = \frac{۱}{۳}$، همچنین $\frac{PC}{PB} = \frac{۱}{۴}$ است. $S(AQN)$ چه کسری از مساحت ABC است؟



۲۹ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sqrt{x-۱} + \frac{۹}{\sqrt{x-۱}+۲} = ۴$$

۳۰ نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{۴۹}{۱۲۸}$ است. اگر یک ضلع مثلث کوچک‌تر ۲۱ باشد، ضلع متناظر به این ضلع در مثلث بزرگ‌تر چند است؟ نسبت محیط مثلث بزرگ‌تر به محیط مثلث کوچک‌تر را به دست آورید.

۳۱ معادلهٔ $\sqrt{۴x^۲ - ۸x - ۳} = ۲x^۲ - ۴x - ۳$ را حل کنید.

۳۲ a را طوری تعیین کنید که توابع $f(x) = |x - ۱|$ و $g(x) = a - |x + ۲|$ بی‌شمار نقطهٔ مشترک داشته باشند.

۳۳ می‌دانیم α و β دو ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^۲ + mx + ۵ = ۰$ هستند و ۵، $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ به‌ترتیب تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند. مقدار m را به دست آورید.

۳۴ معادلهٔ $x^{۲} - ۴x + ۲ = ۰$ را در نظر بگیرید. معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش از دو برابر ریشه‌های این معادله، یک واحد کمتر باشد.

۳۵ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = ۲\sin(\frac{۳۱\pi}{۳}) - \cos(\frac{۵\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶}) + \tan(\frac{۷\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳})$$

۳۶ یک‌به‌یک بودن تابع $f(x) = ۲ - \frac{۱}{x+۱}$ را بررسی کنید.

آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : **ریاضی**	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : **تجربی**	**پایه ی یازدهم دوره ی متوسطه**	تعداد صفحات : **۱۲ صفحه**
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	**جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید**		

ردیف	پاسخنامه	نمره

۱ نقاط روی خط $y = x - ۳$ را به صورت پارامتری می‌نویسیم و سپس فاصلهٔ این نقاط را از خط $y - ۴x = ۳$ برابر $\sqrt{۱۷}$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{|-۴(\alpha) + ۱(\alpha - ۳) - ۳|}{\sqrt{۱+۱۶}} = \sqrt{۱۷} \Rightarrow |-۴(\alpha) + ۱(\alpha - ۳) - ۳| = ۱۷ \Rightarrow |-۳\alpha - ۶| = ۱۷$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۳\alpha - ۶ = ۱۷ \Rightarrow \alpha = -\frac{۲۳}{۳} \\ -۳\alpha - ۶ = -۱۷ \Rightarrow \alpha = \frac{۱۱}{۳} \end{cases}$$

پس دو نقطه به مختصات $A(\frac{۱۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$ و $B(-\frac{۲۳}{۳}, -\frac{۳۲}{۳})$ به فاصلهٔ $\sqrt{۱۷}$ از خط $y - ۴x = ۳$ قرار دارند.

۲ اگر محیط و مساحت مثلث بزرگ‌تر را به‌ترتیب P و S و محیط و مساحت مثلث کوچک‌تر را P' و S' بنامیم و K نسبت تشابه دو مثلث باشد:

می‌دانیم در دو مثلث متشابه:

$$\frac{P}{P'} = K \Rightarrow \frac{۱۵}{۸} = K$$

$$\frac{S}{S'} = K^۲ \Rightarrow \frac{۲۵}{S'} = \frac{۲۲۵}{۶۴} \Rightarrow S' = \frac{۲۵ \times ۶۴}{۲۲۵} = \frac{۶۴}{۹}$$

۳ الف

$$\frac{۲\alpha\beta}{\alpha+\beta} = \frac{۲(\frac{c}{a})}{\frac{-b}{a}} \Rightarrow \frac{۲c}{-b} = \frac{-۶}{-۴} = \frac{۳}{۲}$$

ب

$$\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c} = \frac{-۴}{-۳} = \frac{۴}{۳}$$

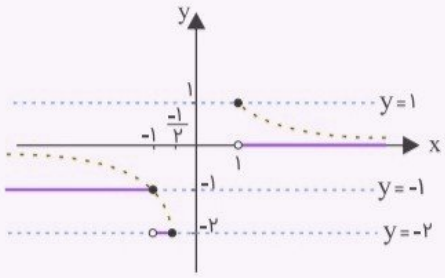
۴

$$\hat{\theta} = \frac{۲\pi}{۸} = \frac{\pi}{۴}$$

$$r = \frac{d}{۲} = ۱۲/۵\,cm$$

$$\ell = r.\theta \Rightarrow \ell = ۱۲/۵ \times \frac{\pi}{۴} = ۳/۱۲۵\pi$$

۵ برای رسم تابع $y = [\frac{۱}{x}]$، از روش ترسیم کمک می‌گیریم، خطوط $y = k$ $(k \in \mathbb{Z})$ را با نمودار تابع $y = \frac{۱}{x}$ تقاطع می‌دهیم، محل برخورد تابع را توپر لحاظ کرده و در بین دو خط موازی، نمودار را به سمت پایین سُر می‌دهیم.



۶

$$f(x) = \begin{cases} ۳ & ; x > ۱ \\ ۲x + ۱ & ; -۲ \leq x \leq ۱ \\ -۳ & ; x < -۲ \end{cases}$$

تابع فقط در بازهٔ $[-۲, ۱]$ یک‌به‌یک است.

$$f(x) = ۲x + ۱ \quad , \quad D_f = [-۲, ۱] \quad , \quad R_f = [-۳, ۳]$$

$$y = ۲x + ۱ \Rightarrow x = \frac{y - ۱}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۲}$$

$$D_{f^{-۱}} = R_f = [-۳, ۳] \quad , \quad R_{f^{-۱}} = D_f = [-۲, ۱]$$

۷

$$f(\frac{۱}{۲}) = -|\frac{۱}{۲} - ۱| = -|-\frac{۱}{۲}| = -\frac{۱}{۲}$$

$$g(\frac{۱}{۲}) = [۲(\frac{۱}{۲}) - ۳] = [۱ - ۳] = [-۲] = -۲$$

$$(\frac{g}{f})(\frac{۱}{۲}) = \frac{g(\frac{۱}{۲})}{f(\frac{۱}{۲})} = \frac{-۲}{-\frac{۱}{۲}} = ۴$$

۸ ریشه‌های معادلهٔ اولیه را α و β می‌گیریم و داریم:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=۶ \\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}=۳ \end{cases}$$

می‌خواهیم معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش $\alpha^۳$ و $\beta^۳$ باشند. مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های جدید را حساب می‌کنیم:

$$S_{\text{جدید}}=\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=۶^۳-۳(۳)(۶)=۲۱۶-۵۴=۱۶۲$$

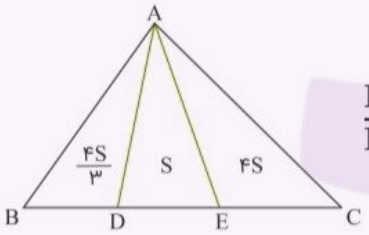
$$P_{\text{جدید}}=\alpha^۳\beta^۳=(\alpha\beta)^۳=۳^۳=۲۷$$

با جایگذاری S و P در معادلهٔ $x^۲-Sx+P=۰$، معادلهٔ جدید به‌صورت $x^۲-۱۶۲x+۲۷=۰$ درمی‌آید.

۹ الف

$$\left(\frac{۲f-g}{f}\right)(۱)=\frac{۲f(۱)-g(۱)}{f(۱)}=\frac{۲\times۱-۰}{۱}=۲$$

۱۰



$$\frac{DE}{BD}=?\Rightarrow\frac{S_{ADE}}{S_{ABD}}=\frac{\frac{۱}{۲}\cancel{AH}\times DE}{\frac{۱}{۲}\cancel{AH}\times BD}\Rightarrow\frac{DE}{BD}=\frac{\cancel{S}}{\frac{۴}{۳}\cancel{S}}=\frac{۳}{۴}$$

$$\frac{BC}{DE}=?\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}\times BC\times\cancel{AH}}{\cancel{\frac{۱}{۲}}\times DE\times\cancel{AH}}\Rightarrow\frac{BC}{DE}=\frac{\frac{۱۹}{۳}\cancel{S}}{\cancel{S}}=\frac{۱۹}{۳}$$

$$\frac{۴S}{۱}+\frac{S}{۱}+\frac{۴S}{۳}=\frac{۱۲S+۳S+۴S}{۳}=\frac{۱۹S}{۳}$$

۱۱ الف

$$L_۱: ۲x+y=۱\Rightarrow y=-۲x+۱\Rightarrow m_۱=-۲$$

$$L_۲: ۴x+۲y=۱۱\Rightarrow ۲y=-۴x+۱۱\Rightarrow y=-۲x+\frac{۱۱}{۲}\Rightarrow m_۲=-۲$$

پس دو خط موازی‌اند، بنابراین دو ضلع دیگر، عمود بر این اضلاع می‌باشند:

$$m_۳=m_۴=\frac{۱}{۲}$$

ب

$$\begin{cases} L_۱ : ۲x + y - ۱ = ۰ \xrightarrow{\times ۲} ۴x + ۲y - ۲ = ۰ \\ L_۲ : ۴x + ۲y - ۱۱ = ۰ \end{cases}$$

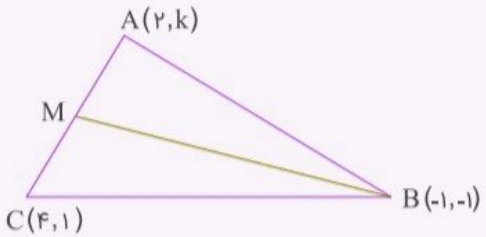
$$\Rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|-۲ + ۱۱|}{\sqrt{۱۶ + ۴}} = \frac{۹}{\sqrt{۲۰}}$$

$$S = (\frac{۹}{\sqrt{۲۰}})^۲ = \frac{۸۱}{۲۰} = ۴/۰۵$$

۱۲

$$[x - ۵] = ۱۲ \Rightarrow ۱۲ \leq x - ۵ < ۱۳ \xrightarrow{+۵} ۱۷ \leq x < ۱۸$$

۱۳ شکل فرضی زیر را در نظر می‌گیریم:



مختصات M را حساب می‌کنیم:

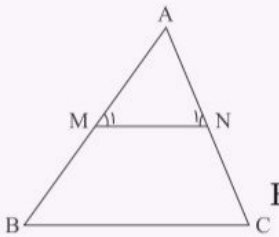
$$M = (۳, \frac{k + ۱}{۲})$$

فاصلهٔ B تا M باید برابر با ۵ باشد:

$$BM = ۵ \Rightarrow \sqrt{(۳ + ۱)^۲ + (\frac{k + ۱}{۲} + ۱)^۲} = ۵$$

$$\Rightarrow ۱۶ + (\frac{k + ۳}{۲})^۲ = ۲۵ \Rightarrow \begin{cases} \frac{k + ۳}{۲} = ۳ \Rightarrow k = ۳ \\ \frac{k + ۳}{۲} = -۳ \Rightarrow k = -۹ \end{cases}$$

۱۴



$$BC||MN \Rightarrow \begin{cases} M_۱ = B \\ N_۱ = C \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} AMN \sim ABC$$

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = (\frac{AM}{AB})^۲ \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{AMN} + \underbrace{\cancel{S_{MNCB}}}_{۱۵\,S_{AMN}}} = (\frac{AM}{AB})^۲$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{S_{AMN}}}{۱۶\cancel{S_{AMN}}} = (\frac{AM}{AB})^۲ \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AB - AM} = \frac{۱}{۴ - ۱} \Rightarrow \frac{MB}{AM} = ۳$$

۱۵ حاصل‌جمع دو رادیکال فرجهٔ ۲، صفر است، بنابراین هر دوی آن‌ها صفر هستند.

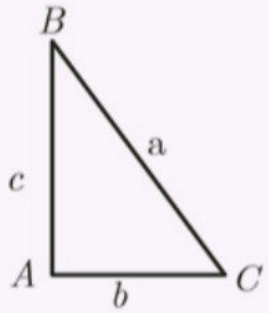
$$\sqrt{x^۲ - ۲x - ۳} = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = +۳ \end{cases}$$

حال بررسی می‌کنیم که کدام‌یک در معادلهٔ دوم صدق می‌کند:

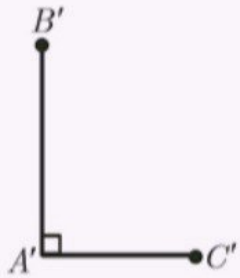
$$\begin{cases} x = ۳ \Rightarrow x^۴ - ۳x^۳ - x^۲ + ۹ = ۰ \Rightarrow ۳^۴ - ۳(۳)^۳ - ۳^۲ + ۹ = ۰ \ \checkmark \\ x = -۱ \Rightarrow x^۴ - ۳x^۳ - x^۲ + ۹ = ۰ \Rightarrow (-۱)^۴ - ۳(-۱)^۳ - (-۱)^۲ + ۹ = ۱۲ \neq ۰ \end{cases}$$

پس این معادله فقط یک جواب دارد. $(x = ۳)$

۱۶ فرض کنید مثلث ABC داده شده است و رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ بین اندازهٔ اضلاع آن برقرار است.



پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل زیر به‌گونه‌ای در نظر می‌گیریم که $\hat{A}' = ۹۰^\circ$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$ است:



با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$، اندازه پاره‌خط $B'C'$ را به دست می‌آوریم و ثابت می‌کنیم: $B'C' = BC$

$$(A'B')^۲ + (A'C')^۲ = (B'C')^۲$$

$$\xrightarrow[AC=A'C']{AB=A'B'} \left.\begin{matrix}(AB)^۲ + (AC)^۲ = (B'C')^۲ \\ (AB)^۲ + (AC)^۲ = (BC)^۲\end{matrix}\right\} \Rightarrow (BC)^۲ = (B'C')^۲ \Rightarrow B'C' = BC$$

$$\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases} \xrightarrow{\text{ض.ض.ض}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}' = ۹۰^\circ$$

۱۷ تمام نقاط روی خط به معادلهٔ $y = ۲x - ۱$، به‌صورت $(\alpha\ ,\ ۲\alpha - ۱)$ قرار دارد. فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مفروض، برابر $\sqrt{۵}$ است. پس:

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x + y - ۸ = ۰ \\ (\alpha\ ,\ ۲\alpha - ۱) \end{cases} \Rightarrow \frac{|۲(\alpha) + (۲\alpha - ۱) - ۸|}{\sqrt{۴ + ۱}} = \sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{|۴\alpha - ۹|}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵} \Rightarrow |۴\alpha - ۹| = ۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴\alpha - ۹ = ۵ \Rightarrow \alpha = \frac{۷}{۲} \\ ۴\alpha - ۹ = -۵ \Rightarrow \alpha = ۱ \end{cases}$$

مرکز دایره دو نقطه می‌تواند باشد: $(۱\ ,\ ۱)$ و $(\frac{۷}{۲}\ ,\ ۶)$

۱۸

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 - 1}{x_1} = \frac{x_2 - 1}{x_2} \Rightarrow x_1x_2 - x_2 = x_1x_2 - x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

پس تابع یک‌به‌یک است.

۱۹ ضابطهٔ سهمی با رأس (x_S, y_S) به‌صورت $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ است. در اینجا رأس سهمی، نقطهٔ $(-1, 4)$ است، پس معادلهٔ سهمی به‌صورت $f(x) = a(x+1)^2 + 4$ است. نقطهٔ $(0, 2)$ روی این سهمی است، پس:

$$f(0) = 2 \Rightarrow a + 4 = 2 \Rightarrow a = -2$$

درنتیجه ضابطهٔ سهمی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$f(x) = -2(x+1)^2 + 4$$

حال معادلهٔ داده شده را حل می‌کنیم:

$$f(x)^2 + 12f(x) - 28 = 0$$
$$\Rightarrow (f(x) - 2)(f(x) + 14) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ f(x) = -14 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} f(x) = 2 \Rightarrow -2(x+1)^2 + 4 = 2 \Rightarrow (x+1)^2 = 1 \Rightarrow x + 1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \\ f(x) = -14 \Rightarrow -2(x+1)^2 + 4 = -14 \Rightarrow (x+1)^2 = 9 \Rightarrow x + 1 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases} \end{cases}$$

۲۰

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a\times ۲}{۲\times ۲}=\dfrac{۲a}{۴}\\ \dfrac{b\times ۳}{۳\times ۳}=\dfrac{۳b}{۹}\\ \dfrac{c\times ۴}{۴\times ۴}=\dfrac{۴c}{۱۶}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{۲a}{۴}+\frac{۳b}{۹}+\frac{۴c}{۱۶}=\frac{۲a+۳b+۴c}{۲۹}=\frac{a}{۲}\ (*)$$

$$۲a+۳b+۴c=\frac{۲۹a}{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a\times ۵}{۲\times ۵}=\dfrac{۵a}{۱۰}\\ \dfrac{b\times(-۴)}{۳\times(-۴)}=\dfrac{-۴b}{-۱۲}\\ \dfrac{c\times ۳}{۴\times ۳}=\dfrac{۳c}{۱۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{۵a}{۱۰}+\frac{-۴b}{-۱۲}+\frac{۳c}{۱۲}=\frac{۵a-۴b+۳c}{۱۰}=\frac{a}{۲}\ (**)$$

$$۵a-۴b+۳c=\frac{۱۰a}{۲}$$

$$\frac{۲a+۳b+۴c}{۵a-۴b+۳c}=\frac{\frac{۲۹a}{۲}}{\frac{۱۰a}{۲}}=\frac{۲۹}{۱۰}$$

۲۱

الف

$$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\xrightarrow{\alpha=۱\ ,\ \beta=۴}f(x)=a(x-۱)(x-۴)$$

$$A\left|\begin{array}{l}۰\\ -۲\end{array}\right.\in f\Rightarrow -۲=a(۰-۱)(۰-۴)\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

$$f(x)=-\frac{۱}{۲}(x-۱)(x-۴)=-\frac{۱}{۲}x^{۲}+\frac{۵}{۲}x-۲$$

ب

$$\text{Max}\left|\begin{array}{l}x=\dfrac{-b}{۲a}=\dfrac{۵}{۲}\\ y=\dfrac{۹}{۸}\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad y_{max}=\frac{۹}{۸}$$

۲۲ برای اینکه معادلهٔ فوق یک ریشه داشته باشد، باید پس از تغییر متغیر، یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی به دست بیاید؛ پس باید $\Delta > ۰$ و ضرب ریشه‌ها $\frac{c}{a} < ۰$ باشد.

$$\sqrt{x} = t$$
$$(۱-m)t^۲ - t + (m-۲) = ۰$$
$$\Delta > ۰ \Rightarrow ۱ - ۴(۱-m)(m-۲) > ۰ \Rightarrow (۲m-۳)^۲ > ۰ \Rightarrow m \neq \frac{۳}{۲}$$
$$\frac{c}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{m-۲}{۱-m} < ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \\ m = ۱ \end{cases}$$

		۱		۲	
m-۲	−		−	۰	+
۱-m	+	۰	−		−
$\frac{m-۲}{۱-m}$	−	ت.ن	+	۰	−

پس $m < ۱$ یا $m > ۲$ است.

۲۳

$$\frac{c}{a} = -۲ \Rightarrow \frac{۲m}{-۱} = -۲ \Rightarrow ۲m = ۲ \Rightarrow m = ۱$$
$$-x^۲ + ۲x + ۲ = ۰ \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{-۲}{-۱} = ۲$$

۲۴ الف ۳ جفت. $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ABH}$، $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ACH}$ و $\overset{\Delta}{ACH} \sim \overset{\Delta}{ABH}$.

ب

$$\left.\begin{matrix} \hat{H} = \hat{A} = ۹۰^\circ \\ \hat{B} = \hat{B} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABH} \overset{\text{زز}}{\sim} \overset{\Delta}{ABC} \xrightarrow{\text{تناسب اضلاع}} \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^۲ = BH \cdot BC$$

۲۵

$$y = a(x - x_۱)^۲ \Rightarrow y = a(x - (-۲))^۲ \Rightarrow y = a(x+۲)^۲$$
$$\xrightarrow{(۰,۱)} ۱ = a(۰+۲)^۲ \Rightarrow ۱ = ۴a \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}$$
$$y = \frac{۱}{۴}(x+۲)^۲ = \frac{۱}{۴}(x^۲ + ۴x + ۴) = \frac{۱}{۴}x^۲ + x + ۱$$

۲۶

$$f(x) = ۲\sin^۲x + ۵\cos^۲x + ۱ = ۲\sin^۲x + ۲\cos^۲x + ۳\cos^۲x + ۱$$
$$= ۲ + ۳\cos^۲x + ۱ = ۳\cos^۲ + ۳$$
$$-۱ \le \cos x \le ۱ \Rightarrow ۰ \le \cos^۲x \le ۱$$
$$\Rightarrow ۰ \le \cos^۲x \le ۱ \Rightarrow ۰ \le ۳\cos^۲x \le ۳ \Rightarrow ۳ \le ۳\cos^۲x + ۳ \le ۶$$
$$R_f = [۳, ۶]$$

۲۷

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABC} : KL \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{AK}{KB} = \dfrac{AL}{LC} \\ \overset{\Delta}{ABL} : KT \parallel BL \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{AK}{KB} = \dfrac{AT}{TL} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AL}{LC} = \frac{AT}{TL} \Rightarrow \frac{۸+x}{۲/۵} = \frac{۸}{x}$$

$$\Rightarrow ۸x + x^۲ - ۲۰ = ۰ \Rightarrow (x+۱۰)(x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۱۰ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۲۸

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{۱}{۴}$$

$$\frac{PC}{PB} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{PC}{BC} = \frac{۱}{۵}$$

$$QN \| PC \Rightarrow AQN \sim APC$$

$$\frac{S(AQN)}{S(APC)} = \left(\frac{AN}{AC}\right)^۲ = \left(\frac{AM}{AB}\right)^۲ = \left(\frac{۱}{۴}\right)^۲ = \frac{۱}{۱۶}$$

در دو مثلث APC و ABC قاعده‌های PC و BC از آن‌ها بر یک امتداد است، پس از رأس مشترک A ارتفاعشان یکی است.

$$\frac{S(APC)}{S(ABC)} = \frac{PC}{BC} = \frac{۱}{۵}$$

$$\frac{S(AQN)}{S(APC)} \times \frac{S(APC)}{S(ABC)} = \frac{۱}{۱۶} \times \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۸۰}$$

۲۹ تغییر متغیر:

$$\sqrt{x-۱} + ۲ = A$$

$$A - ۲ + \frac{۹}{A} = ۴ \Rightarrow A + \frac{۹}{A} = ۶$$

$$\Rightarrow A^۲ - ۶A + ۹ = ۰ \Rightarrow (A-۳)^۲ = ۰ \Rightarrow A = ۳$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-۱} + ۲ = ۳ \Rightarrow \sqrt{x-۱} = ۱ \Rightarrow x = ۲$$

۳۰

$$\frac{S}{S'} = \frac{۴۹}{۱۲۸} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}}$$

$$\frac{۲۱}{x} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}} \Rightarrow x = ۲۴\sqrt{۲}$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{۴۹}{۱۲۸} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{P}{P'} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}}$$

$$\frac{۸\sqrt{۲}}{۷} = \frac{P'}{P} = \frac{\text{محیط بزرگ‌تر}}{\text{محیط کوچک‌تر}}$$

۳۱ با فرض $2x^2 - 4x - 3 = t$، داریم:

$$2x^2 - 4x = t + 3$$

معادلهٔ اولیه را کمی ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\sqrt{4x^2 - 8x - 3} = 2x^2 - 4x - 3 \Rightarrow \sqrt{2(2x^2 - 4x) - 3} = 2x^2 - 4x - 3$$

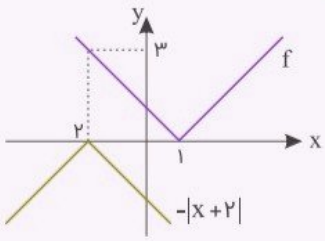
حال به جای $2x^2 - 4x$، عبارت $t + 3$ را قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{2(t+3) - 3} = t \Rightarrow \sqrt{2t + 3} = t$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 & \times \\ t = 3 & \checkmark \end{cases}$$

دقت کنید $t = -1$ در معادله صدق نمی‌کرد.
حال عبارتی که t گرفته بودیم را برابر با ۳ قرار می‌دهیم:

$$2x^2 - 4x - 3 = 3 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0$$
$$\xrightarrow{\times \frac{1}{2}} x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

۳۲ f و g را رسم می‌کنیم:



اگر $a = 3$ باشد، بخشی از f و g بر هم منطبق می‌شوند.

۳۳ اگر ۵، $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند، آنگاه:

$$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha\beta)(5)$$

ازطرفی داریم: $P = 5$ و $S = -m$

$$\Rightarrow (-m)^2 = 5 \times 5 \Rightarrow m = \pm 5$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m = 5 \Rightarrow x^2 + 5x + 5 = 0 & \Delta > 0\,,\ S < 0\,,\ P > 0 \\ m = -5 \Rightarrow x^2 - 5x + 5 = 0 & \Delta > 0\,,\ S > 0\,,\ P > 0 \end{cases}$$

باتوجه‌به شرط مسأله، مبنی بر دو ریشهٔ مثبت، $m = -5$ قابل‌قبول است.

۳۴ α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۴x + ۲ = ۰$ است، بنابراین:

$$\alpha + \beta = ۴ \quad \alpha\beta = ۲$$

$$S = ۲\alpha - ۱ + ۲\beta - ۱ = ۲(\alpha + \beta) - ۲ = ۶$$

$$P = (۲\alpha - ۱)(۲\beta - ۱) = ۴\alpha\beta - ۲(\alpha + \beta) + ۱ = ۸ - ۸ + ۱ = ۱$$

معادلهٔ جدید:

$$x^۲ - ۶x + ۱ = ۰$$

۳۵

$$\sin(\frac{۳۱\pi}{۳}) = \sin(۱۰\pi + \frac{\pi}{۳}) = \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

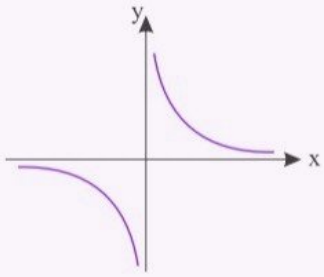
$$\cos(\frac{۵\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶}) = \cos(۲\pi + \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶}) = \cos(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶}) = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan(\frac{۷\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}) = \tan(۳\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}) = \tan(\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳})$$

$$= \tan(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}) = -\cot\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$A = ۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) - \frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۴\sqrt{۳} - ۳}{۶}$$

۳۶ می‌دانیم تابع $y = \frac{۱}{x}$ یک‌به‌یک است و نمودار آن به‌صورت زیر می‌باشد:



تابع $f(x) = ۲ - \frac{۱}{x + ۱}$ از انتقال و قرینه شدن $y = \frac{۱}{x}$ به دست می‌آید. درنتیجه آن تابع نیز یک‌به‌یک است.